§ 4 Der Satz von Bernstein

In diesem Abschnitt geht es um den sogenannten Satz von Bernstein (1916 formuliert und 1927 in Math. Z. 26 erschienen) und damit zusammenhängende Folgerungen. Der Satz lautet (vgl. Nitsche, § 130)

SATZ 4.1: (Bernstein)

> Eine ganze C^2-Lösung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ist affin linear, d.h. der f zugeordnete Graph G_f ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

BEMERKUNGEN: 1) Der Terminus "ganze Lösung" bezieht sich darauf, daß f auf der ganzen Ebene erklärt ist und dort die nichtparametrische Minimalflächengleichung löst.

2) Der Bernstein Satz erinnert in seiner Konzeption etwas an den bekannten Satz von Liouville über ganze holomorphe Funktionen $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, der sagt:

$$F \text{ beschränkt} \implies F \equiv \text{const}.$$

Als Folgerung des Liouville'schen Satzes bekommt man den

Liouville Satz für harmonische Funktionen $\Big\}$ Ist $h: \mathbb{R}^2 \xrightarrow[C^2]{} \mathbb{R}$ Lösung von $\Delta h = 0$ und zudem beschränkt, so muß h konstant sein.

Gleichzeitig gibt es durchaus nichtkonstante und nicht affin lineare ganze Lösungen von

$$\Delta h \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2,$$

d.h. aus dem Erfülltsein der linearen Laplace Gleichung alleine läßt sich über die Struktur der Lösung noch keine Information gewinnen. Der Bernstein Satz zeigt, daß Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen ein vom linearen Fall völlig abweichendes Verhalten zeigen können.

3) Statt Minimalflächen $S \subset \mathbb{R}^3$ zu betrachten kann man allgemeiner n-dimensionale minimale Hyperflächen im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ studieren. Zum Beispiel ist der Graph von $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann lokal minimal in $\mathbb{R}^{n+1}$, wenn

$$* \quad \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0 \quad \text{auf } \Omega$$

gilt, und viele Autoren haben sich mit der naheliegenden Frage befaßt, ob der Bernstein Satz auf ganze Lösungen von $*$ ausgedehnt werden kann. Dies gelang schrittweise für $n \leq 7$ z.B. Almgren, De Giorgi, Simons, in Dimensionen $n > 7$ gibt es jedoch Gegenbeispiele zum Bernstein Satz! (vgl. Nitsche § 130 für Literatur.)

$\square$

Mit Vorkenntnissen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen kann man Satz 4.1 auf elegantem Weg beweisen, wir bevorzugen eine schrittweise elementare Darstellung, die auf einer genauen Analyse der Abbildungseigenschaften des im Beweis von Satz 3.2 eingeführten Diffeomorphismus Λ beruht: das Bild von $D_R(a)$ unter Λ enthält insbesondere eine Kreisscheibe um $\Lambda(a)$ mit Radius R.

Das ist die Aussage von Lemma 4. , die ihrerseits aus einigen einfachen Sachverhalten für konvexe Funktionen folgt.

<u>LEMMA 4.1</u>: Sei $E : D \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 auf der konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^2$. Die Hesse Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le 2}$$

sei in jedem Punkt positiv definit. Dann gilt:

$$(1) \qquad (x-y) \cdot \left(\nabla E(x) - \nabla E(y) \right) > 0$$

für alle $x \neq y$ aus D.

Beweis: Mit $e(t) := E(t \cdot x + (1-t) \cdot y)$ ist

$$e'(1) - e'(0) = \nabla E(x) \cdot (x-y) - \nabla E(y) \cdot (x-y)$$ und

$$e''(t) = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} (tx + (1-t)y)\,(x_i - y_i)\,(x_j - y_j) > 0$$

für $1 \geq t \geq 0$, also $e'(1) > e'(0)$. ■

<u>LEMMA 4.2:</u> Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.1 sei

$$\Omega := Id + \nabla E : D \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + \partial_1 E(x_1,x_2),\ x_2 + \partial_2 E(x_1,x_2)).$$

Dann ist für alle $x \neq y$ aus D

(2) $$(\Omega(x)-\Omega(y))\cdot(x-y) > |x-y|^2$$

(3) $$|\Omega(x)-\Omega(y)| > |x-y|.$$

Beweis: (2) sieht man direkt aus (1)

$$(\Omega(x)-\Omega(y))\cdot(x-y) = (\nabla E(x)-\nabla E(y))\cdot(x-y) + |x-y|^2 > |x-y|^2,$$

und (3) folgt, wenn man die linke Seite von (2) nach oben mit der Ungleichung von Cauchy Schwarz abschätzt. ∎

LEMMA 4.3: Mit den Notationen aus Lemma 5.1 + 5.2 sei D_R die Kreisscheibe vom Radius R um 0. Dann ist Ω ein Diffeomorphismus von D_R auf ein Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$, und es gilt:

(4) $$\mathcal{G} \supset D_R(\Omega(0)),$$

d.h. $\mathcal{G}$ enthält eine Kreisscheibe mit Radius R um $\xi(0)$.

Beweis: Nach (3) ist Ω injektiv, es gilt für die 1te Ableitung

$$D\Omega(x_0,y_0) = \mathrm{Id} + D^2E(x_0,y_0),$$

so daß insbesondere $\det D\Omega(x_0,y_0) > 0$ ist. Zusammen mit der Injektivität folgt, daß Ω ein globaler Diffeomorphismus von D auf $\mathcal{G} := \Omega(D_R)$ ist. (4) ist klar, wenn $\mathcal{G}$ die ganze Ebene ist.

Andernfalls existiert ein Punkt $\xi \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{G}$ (abgeschlossen!) mit

$$|\xi - \Omega(0)| = \inf_{\eta \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{G}} |\eta - \Omega(0)|.$$

Natürlich ist $\xi \in \partial(\mathbb{R}^2 - \mathcal{G}) = \partial\mathcal{G}$, und man findet $\xi^k \in \mathcal{G}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \xi^k = \xi.$$

Sei $x^k \in D_R$ mit $\xi^k = \Omega(x^k)$. $\{x^k\}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}^2$, hat also eine konvergente Teilfolge, die wir wieder $\{x^k\}$ nennen, also

$$x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$$

für einen Punkt $x \in \overline{D_R}$. Offenbar ist $x \notin D_R$, denn sonst hätte man den Widerspruch $\xi = \Omega(x) \in \mathcal{G}$. Also ist $|x| = R$, d.h.

$$|x^k| \longrightarrow R,$$

(3) liefert $|\Omega(x^k) - \Omega(0)| \geq |x^k|$, mithin

$$|\xi - \Omega(0)| \geqslant R.$$

Ist also $\xi' \in D_R(\xi(0))$, d.h. $|\xi' - \Omega(0)| < R$, so kann ξ' nicht in $\mathbb{R}^2 - \mathcal{G}$ liegen (da $\inf\{|\eta - \Omega(0)| : \eta \notin \mathcal{G}\} \geqslant R$), wir bekommen (4). ∎

LEMMA 4.4: Sei $f: D_R(0) \to \mathbb{R}$ Lösung der nicht-parametrischen Minimalflächengleichung auf der offenen Kreisscheibe vom Radius R um den Ursprung. Man setzt wie im Beweis von Satz 3.2

$$\Lambda(x) = x + (\Phi(x), \Psi(x)), \quad x \in D_R,$$

mit Φ, Ψ definiert durch

$$\begin{aligned}
\partial_1 \Phi &= (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \cdot (1+(\partial_1 f)^2), \\
\partial_2 \Phi &= (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \cdot \partial_1 f \, \partial_2 f, \\
\partial_1 \Psi &= (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \, \partial_1 f \cdot \partial_2 f, \\
\partial_2 \Psi &= (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \, (1+(\partial_2 f)^2).
\end{aligned}$$

Dann ist Λ ein Diffeomorphismus $D_R \to \mathcal{G} := \Lambda(D_R)$ mit

$$\mathcal{G} \supset D_R(\Lambda(0)).$$

Beweis: Gemäß $\partial_2 \Phi = \partial_1 \Psi$ findet man $E: D_R(0) \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 mit

$$\nabla E = (\Phi, \Psi)$$

[Ansatz: $E(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} E(tx)\, dt \qquad (\text{o.E. } E(0) = 0)$

$= \int_0^1 x \cdot \nabla E(tx)\, dt = \int_0^1 (x_1 \cdot \Phi(tx) + x_2 \cdot \Psi(tx))\, dt$

rechne nach – mit $\partial_2 \Phi = \partial_1 \Psi$ –, daß $\nabla E = (\Phi, \Psi)$ gilt]

Nachzurechnen ist die Positivität von D^2E:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi = (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,(1+(\partial_1 f)^2)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi = (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,\partial_1 f\cdot\partial_2 f \quad, \text{usw},$$

so daß für $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ folgt:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}\eta_i\eta_j =$$

$$(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\Big[\eta_1^2\cdot(1+(\partial_1 f)^2) + \eta_2^2\,(1+(\partial_2 f)^2)$$

$$+ 2\cdot\eta_1\eta_2\cdot\partial_1 f\,.\,\partial_2 f\Big]$$

$$\geq (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,|\eta|^2$$

gemäß $\quad |2\,\eta_1\eta_2\,\partial_1 f\,\partial_2 f| \leq \eta_1^2\cdot(\partial_1 f)^2 + \eta_2^2\cdot(\partial_2 f)^2.$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.3.

<u>Beweis des Bernstein'schen Satzes:</u>

Sei Λ wie im vorigen Lemma. Der Definitionsbereich von Λ ist die ganze Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, und aus Lemma 4.3 folgt, daß Λ ein Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^2$ ist. Dem Beweis von Satz 3.2 entnehmen wir weiter: $(x_1,x_2) \to (\Lambda^{-1}(x_1,x_2),\ f\circ\Lambda^{-1}(x_1,x_2)) =: U(x_1,x_2)$ ist eine

Konforme Parametrisierung von $S = G_f$

Nach Lemma 3.3 sind

$$\phi_k(\xi) := \frac{\partial U^k}{\partial \xi_1}(\xi) - i\,\frac{\partial U^k}{\partial \xi_2}(\xi)\ , \quad k = 1,2,3,$$

auf $\mathbb{C}$ holomorph mit

$$\mathrm{Im}\,\{\overline{\phi_1}\cdot\phi_2\} = \mathrm{Im}\,\{(\partial_1 U^1 + i\,\partial_2 U^1)\cdot(\partial_1 U^2 - i\,\partial_2 U^2)\}$$

$$= -\{\partial_1 U^1 \cdot \partial_2 U^2 - \partial_1 U^2 \cdot \partial_2 U^1\}$$

$$= -\det D(U^1, U^2) = -\det D\Lambda^{-1}$$

$$= -(\det D\Lambda)^{-1}\big|_{\Lambda^{-1}} < 0;$$

wobei die letzte Ungleichung aus der strikten Positivität der Funktionaldeterminante von Λ folgt.

Speziell sind ϕ_1, ϕ_2 nullstellenfrei, und

$$\mathrm{Im}\,\{\phi_2/\phi_1\} = |\phi_1|^{-2}\,\mathrm{Im}\,\{\overline{\phi_1}\,\phi_2\} < 0,$$

so daß ϕ_2/ϕ_1 auf $\mathbb{C}$ holomorph ist und Imaginärteil < 0 hat.

Folglich ist ϕ_2/ϕ_1 nach einer Variante des Liouville Satzes konstant:

$$z \to e^{-i\,\phi_2/\phi_1(z)} = e^{-i\,\mathrm{Re}\,\{\phi_2(z)/\phi_1(z)\}}\cdot e^{+\mathrm{Im}\,\{\phi_2(z)/\phi_1(z)\}}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und durch 1 beschränkt, also konstant. Das er-

gibt
$$0 = \frac{d}{dz}\, e^{-i\,\phi_2/\phi_1} = -i\,\frac{d}{dz}\left\{\frac{\phi_2}{\phi_1}\right\} e^{-i\,\phi_2/\phi_1}\,,$$

und da exp ohne Nullstelle ist, folgt $\frac{d}{dz}\left\{\phi_2/\phi_1\right\} = 0$, mithin

$$\phi_2 = c\cdot\phi_1,\qquad c = a - i\,b\,,\quad b>0\ \left(\operatorname{Im}\{\phi_2/\phi_1\}<0\right).$$

Dies kann man schreiben als

$$\partial_1 U^2 = a\cdot\partial_1 U^1 - b\,\partial_2 U^1\,;$$

$$\partial_2 U^2 = b\,\partial_1 U^1 + a\cdot\partial_2 U^1\,.$$

Führt man die Koordinatentransformation

$$T_1(y_1,y_2) := y_1,\qquad T_2(y_1,y_2) := b^{-1}\,(y_2 - a\cdot y_1)$$

ein und setzt

$$V^1(x_1,x_2) := T_1\circ(U^1,U^2)(x_1,x_2),\quad V^2(x_1,x_2) = T_2\circ(U^1,U^2)(x_1,x_2),$$

so folgt

$$\partial_1 V^1 = \partial_1 U^1\,,\quad \partial_2 V^2 = \partial_2\left\{b^{-1}\,(U^2 - a U^1)\right\} =$$

$$b^{-1}\,\partial_2 U^2 - a\cdot b^{-1}\,\partial_2 U^1 = \partial_1 U^1$$

$$\Longrightarrow\ \partial_1 V^1 = \partial_2 V^2\,,$$

und

$$\partial_2 V^1 = \partial_2 U^1, \quad -\partial_1 V^2 = -(b^{-1}\partial_1 U^2 - b^{-1} a\, \partial_1 U^1) = \partial_2 U^1$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_2 V^1 = -\partial_1 V^2.$$

Also ist $V : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Damit rechnet man leicht nach, daß $u := U \circ V^{-1}$ (V^{-1} steht für die Umkehrabbildung!) ebenfalls konforme Parameterdarstellung von G_f ist. Es gilt:

$$u^1(x_1,x_2) = U^1 \circ (T \circ (U^1,U^2))^{-1}(x_1,x_2) =$$

$$= U^1 \circ (U^1,U^2)^{-1}(T^{-1}(x_1,x_2)) = (U^1 \circ (U^1,U^2))(x_1, ax_1 + bx_2)$$

$$= x_1,$$

$$u^2(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2,$$

mithin haben wir jetzt eine konforme Parametrisierung vom Typ

$$(x_1,x_2) \to (x_1,\ ax_1 + b\,x_2,\ u^3(x_1,x_2)).$$

Bildet man die dazu gemäß Lemma 3.3 gehörigen holomorphen Funktionen $\tilde\Phi_1, \tilde\Phi_2, \tilde\Phi_3$, so folgt sofort

$$\tilde\Phi_1 = \text{const}, \quad \tilde\Phi_2 = \text{const}$$

und aus $\sum_{k=1}^{3} \tilde\Phi_k^2 = 0$ folgt $\tilde\Phi_3^2 \equiv \text{const}$. Ist diese letzte Konstante 0, so folgt $\tilde\Phi_3 \equiv 0$. Andernfalls hat $\tilde\Phi_3$ keine

Nullstelle. Aus $2 \cdot \frac{d}{dz}\tilde{\phi}_3 \cdot \tilde{\phi}_3 = 0$ folgt $\frac{d}{dz}\tilde{\phi}_3 = 0$,

also in jedem Fall $\tilde{\phi}_3 = const.$ Gemäß

$$\tilde{\phi}_3 = \partial_1 u^3 - i\, \partial_2 u^3$$

ist dann $\nabla u^3 = A \in \mathbb{R}^2$ ein konstanter Vektor und wir können schreiben

$$u^3(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma \,,$$

d.h.

$$G_f = \{ (x_1, a x_1 + b x_2, \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \alpha x_1 + \beta\, b^{-1}(x_2 - a x_1) + \gamma : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1, b^{-1}(x_2 - a x_1))$$

Daraus liest man ab: $f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta \cdot b^{-1}(x_2 - a x_1) + \gamma$,

was zu beweisen war. ∎

<u>KOROLLAR:</u> Eine beschränkte ganze Lösung der nicht parametrischen Minimalflächengleichung ist konstant.

(denn die Konstanten sind die einzigen beschränkten affin linearen Funktionen)